Πρόταση: Δύο μετρικές ρ_1, ρ_2 στον E μχ είναι ισοδύναμες αν.ν το σύνολο ρ_1-συγκλινουσών ακολουθιών στον E μχ ταυτίζεται με το σύνολο ρ_2-συγκλινουσών ακολουθιών στον E μχ.

ΛΗΜΜΑ: Αν το σύνολο ρ_1-συγκλινουσών ακολουθιών εν E ταυτίζεται με το σύνολο ρ_2-συγκλινουσών ακολουθιών εν E, τότε $\rho_1 - \lim_{\nu\in\mathbb{N}} a_\nu = \ell \Leftrightarrow \rho_2 - \lim_{\nu\in\mathbb{N}} a_\nu = \ell$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ ΠΡΟΤΑΣΗΣ:

$\{\Rightarrow\}$: Έστω ρ_1, ρ_2 ισοδύναμες και $(a_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ εν E με $\rho_1 - \lim_{\nu\in\mathbb{N}} a_\nu = \ell$
Έστω $U(\ell) \in \mathcal{N}_{\rho_2}(\ell)$. Επειδή, ρ_1, ρ_2 ισοδύναμες $\Rightarrow$
$\Rightarrow U(\ell) \in \mathcal{N}_{\rho_1}(\ell) \Rightarrow a_\nu \in U(\ell)$ τελικά $\forall \nu\in\mathbb{N}$

$\{\Leftarrow\}$: Έστω ότι ισχύει το συμπέρασμα.
Τότε από το ΛΗΜΜΑ: $\rho_1 - \lim_{\nu\in\mathbb{N}} a_\nu = \ell \Leftrightarrow \rho_2 - \lim_{\nu\in\mathbb{N}} a_\nu = \ell \Leftrightarrow$
$\rho_2 - \lim_{\nu\in\mathbb{N}} i_E(a_\nu) = i_E(\ell) \Rightarrow i_E$: συνεχής και βέβαια i_E^{-1} συνεχής. Άρα, i_E ομοιομορφισμός $\Rightarrow \rho_1 \& \rho_2$ ισοδύναμες

Εφαρμογή: Έστω ρ μετρική στον E μχ.
ΝΔΟ η μετρική $\tau(x,y) = \dfrac{\rho(x,y)}{1+\rho(x,y)}$ ισοδύναμη με την $\rho(x,y)$ στον E μχ

ΛΥΣΗ

Έστω $(a_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ ακολουθία στον E, $\rho - \lim_{\nu\in\mathbb{N}} a_\nu = \ell \Rightarrow \lim_{\nu\in\mathbb{N}} \rho(a_\nu, \ell) = 0$

$$\frac{\lim \rho(a_\nu,\ell)}{1+\lim \rho(a_\nu,\ell)} = \lim \tau(a_\nu,\ell) \Rightarrow \lim \tau(a_\nu,\ell) = \frac{0}{1+0} = 0$$

Ανάποδα,

Έστω $\tau - \lim a_\nu = \ell \Rightarrow \lim \tau(a_\nu,\ell) = 0$

$$\tau(a_\nu,\ell) = \frac{\rho(a_\nu,\ell)}{1+\rho(a_\nu,\ell)} \Rightarrow \tau(a_\nu,\ell) + \tau(a_\nu,\ell)\cdot\rho(a_\nu,\ell) - \rho(a_\nu,\ell) = 0$$

$$\Rightarrow \rho(a_\nu,\ell)\left(\tau(a_\nu,\ell) - 1\right) + \tau(a_\nu,\ell) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \rho(a_\nu,\ell) = \frac{\tau(a_\nu,\ell)}{1-\tau(a_\nu,\ell)}, \quad \tau(a_\nu,\ell) < 1 \quad \nu\in\mathbb{N}$$

$$\Rightarrow \lim \rho(a_\nu,\ell) = \frac{0}{1-0} = 0 \Rightarrow \lim \rho(a_\nu,\ell) = 0$$

Πόρισμα: Έστω ρ_1, ρ_2 μετρικές στο E
Υποθέτουμε ότι $\exists\, A, B > 0$:
$$A\rho_1(x,y) \leq \rho_2(x,y) \leq B\rho_1(x,y) \quad , \forall x,y \text{ εν } E$$
Τότε οι μετρικές ρ_1, ρ_2 είναι ισοδύναμες

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Έστω $(a_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ ρ- συγκλίνουσα $\Rightarrow (\exists \ell \in E) : \rho_1\text{-}\lim a_\nu = \ell \Rightarrow$
$\Rightarrow \lim \rho(a_\nu, \ell) = 0$ τότε από την ανίσωση
$$A\rho_1(a_\nu, \ell) \leq \rho_2(a_\nu, \ell) \leq B\rho_2(a_\nu, \ell) \Rightarrow \lim \rho_2(a_\nu, \ell) = 0$$

Το αντίστροφο δεν ισχύει που παίρνουμε ως αντιπαράδειγμα την μετρική: $\tau = \dfrac{\rho}{1+\rho}$.

όπου $\tau(x,y) \leq \rho(x,y)$ αλλά $\rho(x,y) \not\leq \tau(x,y)$

Στον καρτεσιανό μχΕ των μχ. (E_i, ρ_i), $i = 1, 2, \ldots, n$
με $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ και $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ εν $E = \overset{k}{\underset{i=1}{\times}} E_i$
είχαμε ορίσει:
$\rho(x,y) := \sqrt{\rho_1^2(x,y) + \ldots + \rho_n^2(x,y)}$ και άλλες μετρικές:

$$\rho'(x,y) = \max_{1\leq i\leq k} \rho_i(x_i, y_i) \quad \text{και} \quad \rho''(x,y) = \rho_1(x_1,y_1) + \ldots + \rho_2(x_n, y_n)$$

Εφαρμογή:

Αποδεικνύεται ότι εάν
$$\rho'(x,y) \leq \rho(x,y) \leq \sqrt{k}\cdot\rho'(x,y)$$
$$\frac{1}{\sqrt{k}}\rho''(x,y) \leq \rho(x,y) \leq \rho''(x,y)$$
τότε οι ρ', ρ'' ισοδύναμες με την ρ.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2ο

ΓΕΝΙΚΗ ΤΟΠΟΛΟΓΙΑ

Ορισμός:

Για τη συλλογή $\mathcal{T} \subseteq P(E)$:

1) $\emptyset \in \mathcal{T}$ και $E \in \mathcal{T}$
2) $(\forall X, Y$ εν $\mathcal{T})$: $X \cap Y \in \mathcal{T}$
3) $(\forall G \subseteq \mathcal{T})$: $\cup G \in \mathcal{T}$

Ετσι, η συλλογή $\mathcal{T}$ θα καλείται τοπολογία στο E και τα στοιχεία της $\mathcal{T}$ και μόνο αυτά θα καλούνται ανοιχτά σύνολα στο E. Τα συμπληρώματα των μελώς της $\mathcal{T}$ και μόνο αυτά θα καλούνται κλειστά σύνολα στο E. Τελος, ο $(E, \mathcal{T})$ καλείται τοπολογικός χώρος

Παρατήρηση:

Εαν (E, ρ) διακριτος $\Rightarrow$ $\Rightarrow \mathcal{T}_\rho = P(E)$ και θα λεμε διακριτη τοπολογια αν $\mathcal{T} = P(E)$

Πρόταση: Αν $\mathcal{T}$ είναι τοπολογία στο E, τότε $\cup \mathcal{T} = E$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

$\cup \mathcal{T} \subseteq E$ προφανες

$\mathcal{T}$ τοπολογία $\Rightarrow E \in \mathcal{T} \Rightarrow E \subseteq \cup \mathcal{T}$

$\Rightarrow E = \cup \mathcal{T}$

Πρόταση: Ας είναι $\mathcal{T}_i, i \in I$ τοπολογίες στον E. Τοτε η συλλογή $\bigcap_{i \in I} \mathcal{T}_i$ είναι τοπολογία

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

1) $(\forall i \in I)$: $\emptyset \in \mathcal{T}_i$ και $E \in \mathcal{T}_i \Rightarrow \emptyset \in \bigcap_{i \in I} \mathcal{T}_i$ και $E \in \bigcap_{i \in I} \mathcal{T}_i$

2) Ας είναι $X \in \bigcap_{i \in I} \mathcal{T}_i$ και $Y \in \bigcap_{i \in I} \mathcal{T}_i \Rightarrow (\forall i \in I)$: $X \in \mathcal{T}_i$ και $Y \in \mathcal{T}_i$ $\Rightarrow X \cap Y \in \bigcap_{i \in I} \mathcal{T}_i$

3) $G \subseteq \bigcap_{i \in I} \mathcal{T}_i \Rightarrow (\forall i \in I)$: $G \subseteq \mathcal{T}_i \xRightarrow{\mathcal{T}_i \text{ τοπολ}} (\forall i \in I)\ \cup G \in \mathcal{T}_i \Rightarrow$ $\Rightarrow \cup G \in \bigcap_{i \in I} \mathcal{T}_i$

Παράδειγμα:

Εστω $E = \{\alpha, \beta, \gamma\}$ και οι τοπολογίες $\mathcal{T}_1 = \{\emptyset, E, \{a\}\}$ και $\mathcal{T}_2 = \{\emptyset, E, \{b\}\}$

Παρατηρούμε ότι $\mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2 = \{\emptyset, E, \{a\}, \{b\}\}$ δεν είναι τοπολογία γιατί δεν πληρειται η 3η ιδιότητα

Αρα, η ενωση οποιονδηποτε τοπολογιών δεν είναι παντα τοπολογια

Παράδειγμα (Συμπεπερασμένη Τοπολογία)

Έστω $\mathcal{T} = \{X \subseteq E : X^c$ πεπερασμένο$\} \cup \{\emptyset\}$

τυχόντα $X, Y \in \mathcal{T} \Rightarrow X^c, Y^c$ πεπερασμένα

$(X \cap Y)^c = X^c \cup Y^c$ $\Big\} \Rightarrow X \cap Y \in \mathcal{T}$

και για την ένωση

$A_i, i \in I$ οικογένεια εν $\mathcal{T}$

$(\bigcup_{i\in I} A_i)^c = \bigcap_{i \in I} A_i^c$ πεπερασμένο $\Big\} \Rightarrow \bigcup_{i\in I} A_i \in \mathcal{T}$

Παράδειγμα (Συναριθμήσιμη Τοπολογία)

Έστω $\mathcal{T} = \{X \subseteq E : X^c$ το πολύ αριθμήσιμο$\} \cup \{\emptyset\}$

τότε έχει ίδιες ιδιότητες ως προς την τομή και την ένωση.

Ορισμός: $A^\circ = \bigcup\{X \in \mathcal{T} : X \subseteq A\}$ και $\overline{A} = \bigcap\{X \in \mathcal{T} : X^c \in \mathcal{T}$ και $X \supseteq A\}$

το σύνολο A° καλείται πυρήνας και το σύνολο $\overline{A}$ καλείται θήκη του συνόλου A

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΠΥΡΗΝΑ:

i) $\emptyset = \emptyset^\circ$ και $E = E^\circ$

ii) $A^\circ \subseteq A$

iii) $A^\circ \in \mathcal{T}$

iv) A° είναι το μέγιστο ανοιχτό $\subseteq A$

v) $A \in \mathcal{T} \Leftrightarrow A = A^\circ$

vi) $A \subseteq B \Leftrightarrow A^\circ \subseteq B^\circ$

vii) $A^{\circ\circ} = A^\circ$

viii) $x \in A^\circ \Rightarrow (\exists X \in \mathcal{T}) : x \in X \subseteq A$

ix) $(\bigcup_{i\in I} A_i)^\circ \supseteq \bigcup_{i \in I} A_i^\circ$ και x) $(\bigcap_{i\in I} A_i)^\circ \subseteq \bigcap_{i\in I} A_i^\circ$

Κατά αντιστοιχία και οι ιδιότητες της θήκης

Εφαρμογή

A, B κλειστά $\Rightarrow A \cup B$ κλειστό

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

A κλειστό $\Rightarrow A^c \in \mathcal{T}$

B κλειστό $\Rightarrow B^c \in \mathcal{T}$ $\Big\} (A \cup B)^c = A^c \cap B^c \in \mathcal{T} \Rightarrow A \cup B$ κλειστό

Εφαρμογή 2:

$\mathcal{C}$ συλλογή κλειστών συνόλων $\Rightarrow \bigcap \mathcal{C}$ κλειστό

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

$$\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right)^c = \bigcup_{i\in I} A_i^c \in \mathcal{T}$$

Άρα, $\bigcap_{i\in I} A_i = \bigcap \mathcal{C}$ κλειστό

Ορισμός: Το συνολο των εξωτερικων σημειων του A είναι το $\text{ext}A = (A^c)^o$ και το σύνολο $\partial A = \bar{A} - A^o$ είναι το συνορο του συνόλου A.

Ορισμός: Ενα σημειο x καλείται σσ στο A εαν.ν για τυχόν ανοιχτό συνολο που το περιέχει, θα περιέχει και απειρα στοιχεια του συνολου. Συμβολισμός συνόλου σσ $A^d = A'$

Οι ιδιότητες είναι παρόμοιες με τις παλιές στην απλή τοπολογία.

Ορισμός: Ενα συνολο A είναι πυκνο εν $E \Leftrightarrow \bar{A} = E$

SOS Προταση: A πυκνο $\Leftrightarrow (\forall B \neq \emptyset$ ανοιχτο$)$ ισχυει $A \cap B \neq \emptyset$

(Μεταφέρεται στους τοπολογικούς χώρους;;)

Η αποδειξη συνεχίνεται ως ασκηση.